

# NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN THCS

Trong toán học có rất nhiều bài toán có rất nhiều cách giải. Với bài viết này tác giả xin được đề cập đến một số cách giải bài toán cấp THCS thông qua việc vẽ đường phụ. Đây là các cách giải được khai thác theo các hướng khác nhau trên cơ sở tính chất đường trung bình của tam giác, nhằm phát huy tính sáng tạo cho học sinh nhằm giúp các em hứng thú hơn trong việc học và làm toán. Tác giả bài viết mong nhận được sự đóng góp ý kiến, nhận xét của các thầy cô, bạn đọc trong cả nước nhằm ngày càng hoàn thiện hơn.

**Bài toán :** Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến CD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho BK = BA. Chứng minh rằng  $CD = \frac{1}{2}CK$  <sup>(1)</sup>

**Giải:** Ở đây xin được giới thiệu 10 cách giải bài toán trên.

## Cách 1: (Hình 1)

Gọi E là trung điểm của AC.

Có BE là đường trung bình của  $\Delta AKC \Rightarrow BE = \frac{1}{2}KC$  (1)

Xét  $\Delta BDC$  và  $\Delta CEB$  có:

$BD = CE$  (vì  $BD = \frac{1}{2}AB$ ;  $CE = \frac{1}{2}AC$  mà  $AB = AC$ ); Cạnh BC chung;

$\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$  (vì  $\Delta ABC$  cân tại A);

Vậy  $\Delta BDC = \Delta CEB$  (c.g.c);

Suy ra  $CD = BE$  (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $CD = \frac{1}{2}CK$  (đ.p.c.m)

## Cách 2: (Hình 2)

Gọi H là trung điểm của KC. BH là đường trung bình của  $\Delta AKC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$

Xét  $\Delta BDC$  và  $\Delta BHC$  có:

$BD = BH$  (vì  $BD = \frac{1}{2}AB$ ;  $BH = \frac{1}{2}AC$  mà  $AB = AC$ );

$\widehat{HBC} = \widehat{DBC}$  vì  $\widehat{DBC} = \widehat{ACB}$  mà  $\widehat{ACB} = \widehat{HBC}$  (do so le trong,  $BH // AC$ );

BC cạnh chung;

Vậy  $\Delta BDC = \Delta BHC$  (c.g.c)

Suy ra  $CH = DC$  (hai cạnh tương ứng); (1)

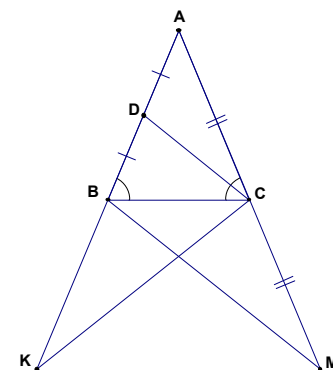
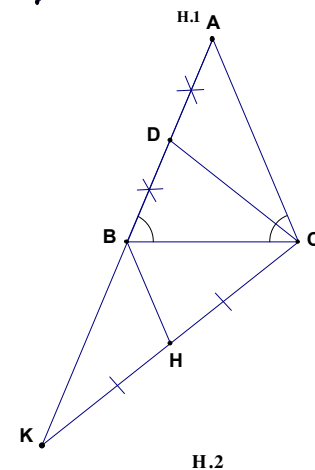
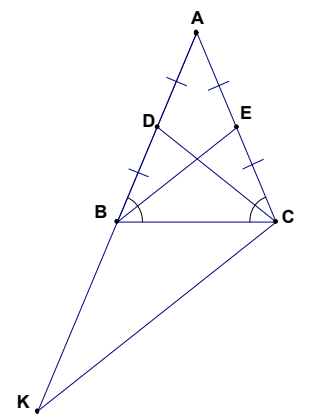
Mà H là trung điểm của KC nên  $CH = \frac{1}{2}CK$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra:  $CD = \frac{1}{2}CK$ .

## Cách 3: (hình bên)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm M sao cho  $CA = CM$ ; CD là đường trung bình của  $\Delta ABM \Rightarrow DC = \frac{1}{2}BM$  (1) Xét  $\Delta KBC$  và  $\Delta MCB$  có:

BC cạnh chung;  $\widehat{KBC} = \widehat{MCB}$  (cùng bù với  $\widehat{ABC}$ );



<sup>(1)</sup> Trích Nâng cao và phát triển toán 7 Nhà xuất bản Giáo dục.

KB = MC (vì KB = AB; MC = AC; AB = AC);  
 Vậy  $\triangle KBC = \triangle MCB$  (c.g.c)  $\Rightarrow KC = MB$  (hai cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $DC = \frac{1}{2} CK$ . (đ.p.c.m);

**Cách 4: (hình 4)**

Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho  $CB = CN$ ; Ta có: DC là đường trung bình của  $\triangle ABN \Rightarrow CD = \frac{1}{2} AN$  (1);

Xét  $\triangle KBC$  và  $\triangle ACN$  có:

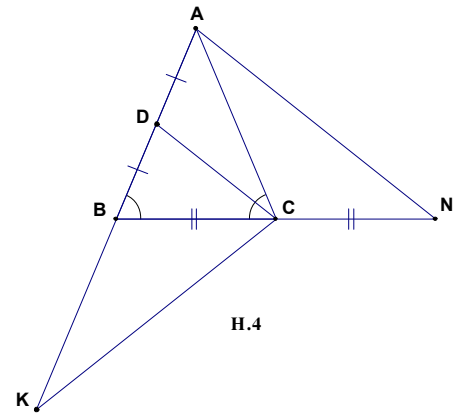
$BC = CN$ ;  $\widehat{KBC} = \widehat{ACN}$

(vì  $\widehat{KBC} = 180^\circ - \widehat{ABC}$ ;  $\widehat{ACN} = 180^\circ - \widehat{ACB}$  mà  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ )

$KB = AC$  (cùng bằng AB);

Vậy  $\triangle KBC = \triangle ACN$  (c.g.c)  $\Rightarrow CK = AN$  (hai cạnh tương ứng) (2);

Từ (1) và (2) suy ra:  $CD = \frac{1}{2} CK$ . (đ.p.c.m);



**Cách 5: (hình 5)**

Gọi P; Q lần lượt là trung điểm của BC và BK;

Có DP là đường trung bình của  $\triangle ABC \Rightarrow DP = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB = DB$ ;

$DP \parallel AC \Rightarrow \widehat{DPB} = \widehat{ACP}$  (cùng bù với  $\widehat{DPC}$ ); Theo giả thiết  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$  ( $\triangle ABC$  cân tại A);  $\widehat{DPB} = \widehat{DBP}$  mà

$\widehat{QBP} = 180^\circ - \widehat{DBP}$ ;  $\widehat{DPC} = 180^\circ - \widehat{DPB} \Rightarrow \widehat{QBP} = \widehat{DPC}$

Xét  $\triangle QBP$  và  $\triangle DPC$  có:

$QB = DP$ ;  $\widehat{QBP} = \widehat{DPC}$  (chứng minh trên);  $BP = CP$  (cùng bằng  $\frac{1}{2} BC$ );

Vậy  $\triangle QBP = \triangle DPC$  (c.g.c)  $\Rightarrow DC = QB$  (1);

Mặt khác QP là đường trung bình của  $\triangle KBC$  nên  $QP = \frac{1}{2} CK$  (2);

Từ (1) và (2) suy ra:  $CD = \frac{1}{2} CK$  (đ.p.c.m);

**Cách 6: (Hình 6).**

Gọi E; O lần lượt là trung điểm của AC và KC; OE là đường trung bình của  $\triangle ACK$

nên  $OE = \frac{1}{2} AK$  mà  $AK = 2AB = 2AC \Rightarrow OE = AB = AC$ ;

Xét  $\triangle CDA$  và  $\triangle OCE$  có:

$AD = CE$  (cùng bằng  $\frac{1}{2} AC$ );  $OE = CA$ ;  $\widehat{DAC} = \widehat{CEO}$  (đồng vị,  $OE \parallel AD$ );

Vậy  $\triangle CDA = \triangle OCE$  (c.g.c)  $\Rightarrow OC = CD$ ; (1)

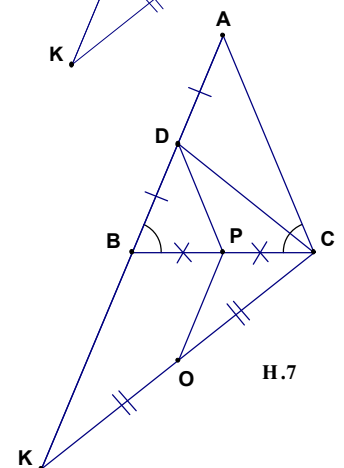
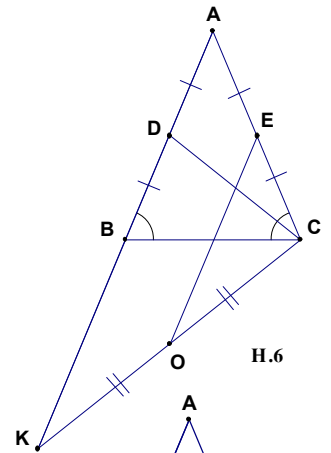
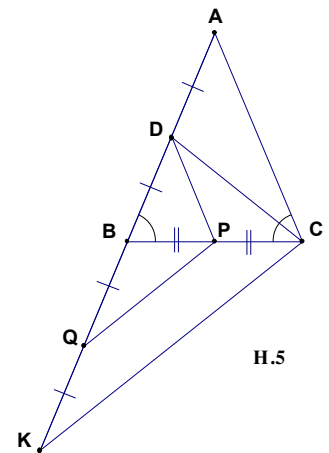
Mặt khác O là trung điểm CK nên  $OC = \frac{1}{2} CK$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $CD = \frac{1}{2} CK$ . (đ.p.c.m);

**Cách 7: (hình 7)**

Gọi P; O lần lượt là trung điểm của BC và CK;

DP là đường trung bình của  $\triangle ABC$  nên  $DP = \frac{1}{2} AC$



OP là đường trung bình của  $\triangle CBK$  nên  $OP = \frac{1}{2} BK$

Theo bài ra, ta có  $BK = AC$  nên  $DP = OP$ ;

$\widehat{OPB} = \widehat{DBP}$  (so le trong,  $OP // DB$ );  $\widehat{DBP} = \widehat{ACP}$  và  $\widehat{ACP} = \widehat{DPB} \Rightarrow \widehat{OPB} = \widehat{DPB} \Rightarrow \widehat{OPC} = \widehat{DPC}$

Xét  $\triangle DPC$  và  $\triangle OPC$  có:

$DP = OP$  (c/m trên);

$\widehat{OPC} = \widehat{DPC}$  (c/m trên);

Cạnh PC chung

Vậy  $\triangle DPC = \triangle OPC$  (c.g.c)  $\Rightarrow OC = CD$  mà  $OC = \frac{1}{2} CK \Rightarrow CD = \frac{1}{2} CK$ . (đ.p.c.m).

**Cách 8: (hình 8)**

Trên tia đối của tia DC lấy điểm F sao cho  $DF = DC$ ;

Xét  $\triangle BDF$  và  $\triangle ADC$  có:

$DF = DC$ ;  $DA = DB$ ;  $\widehat{FDB} = \widehat{CDA}$  (hai góc đối đỉnh);

suy ra:  $\triangle BDF = \triangle ADC$  (c.g.c)  $\Rightarrow BF = AC$  mà  $AC = BK$  nên  $BF = BK$ ;

Ta lại có:

$\widehat{FBC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$  ( $BF // AC$  nên hai góc trong cùng phía bù nhau);

$\widehat{KBC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$  (hai góc kề bù)

mà  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$  ( $\triangle ABC$  cân tại A)  $\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{FBC}$

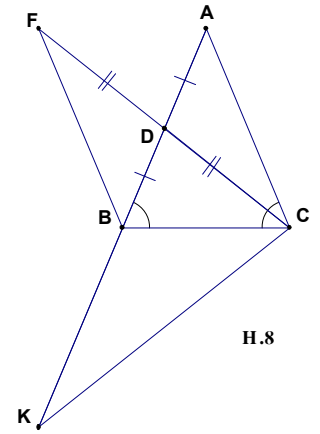
Xét  $\triangle FBC$  và  $\triangle KBC$  có:

$FB = KB$  (c/m trên);

$\widehat{KBC} = \widehat{FBC}$ ;

BC cạnh chung;

Vậy  $\triangle FBC = \triangle KBC$  (c.g.c)  $\Rightarrow FC = CK \Rightarrow 2CD = CK \Rightarrow CD = \frac{1}{2} CK$ . (đ.p.c.m);



H.8

**Cách 9: (hình 9);**

Từ B kẻ đường thẳng song song với CK cắt AC tại O; Từ C kẻ đường

thẳng song song với BK cắt BO kéo dài tại R;

Để dàng chứng minh được  $CR = BK = AB$ ;  $BR = CK$ ;

Xét  $\triangle ROC$  và  $\triangle BOA$  có:

$\widehat{CRO} = \widehat{ABO}$  (so le trong,  $CR // AB$ );  $CR = AB$ ;

$\widehat{RCO} = \widehat{BAO}$  (so le trong,  $CR // AB$ ) Suy ra:  $\triangle ROC = \triangle BOA$  (g.c.g);

$\Rightarrow OA = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB$ ;  $OB = OR$ ;  $\Rightarrow OR = \frac{1}{2} BR = \frac{1}{2} CK$ ; (1);

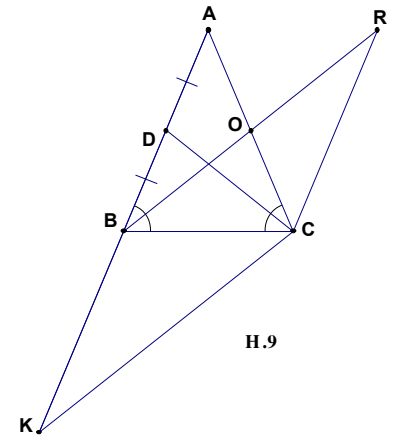
Xét  $\triangle ADC$  và  $\triangle COR$  có:

$AD = OC$  (cùng bằng  $\frac{1}{2} AB$ );  $\widehat{RCO} = \widehat{DAO}$  (so le trong,  $CR // AB$ );

$CR = AC$  (cùng bằng  $AB$ );

Vậy  $\triangle ADC = \triangle COR$  (c.g.c);  $\Rightarrow OR = CD$  (2);

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow CD = \frac{1}{2} CK$ . (đ.p.c.m);



H.9

**Cách 10: (hình 10)**

Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho  $BF = BC$ ; Nối FK; Gọi I là trung điểm của FK;

Xét  $\triangle FBK$  và  $\triangle CBA$  có:

$FB = CB$ ;  $\widehat{FBK} = \widehat{CBA}$  (hai góc đối đỉnh);  $AB = KB$  (giả thiết);

nên  $\triangle FBK = \triangle CBA$  (c.g.c)  $\Rightarrow FK = AC$

mà  $AB = AC \Rightarrow FK = AB \Rightarrow \frac{1}{2} FK = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow FI = DB$ ; (1)

Theo bài ra, ta có:  $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$  mà  $\widehat{ACB} = \widehat{BFI} \Rightarrow \widehat{BFI} = \widehat{ABC} = \widehat{DBC}$  (2)

Xét  $\triangle FBI$  và  $\triangle BCD$  có:

$FB = BC$ ;

$\widehat{BFI} = \widehat{DBC}$  (theo (2));

$FI = BD$  (theo (1));

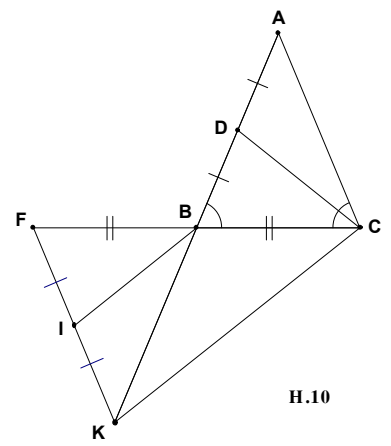
Vậy  $\triangle FBI = \triangle BCD$  (c.g.c)  $\Rightarrow BI = CD$  (3);

Mặt khác do I; B lần lượt là trung điểm của FK và FC  $\Rightarrow IB$  là đường trung bình của  $\triangle KFC$

$\Rightarrow BI = \frac{1}{2} CK$  (4); Từ (3) và (4) suy ra:  $CD = \frac{1}{2} CK$ . (đ.p.c.m);

**Chú ý:** Trong các cách vẽ đường phụ, có thể lập luận theo nhiều cách khác nhau để chứng minh được

$CD = \frac{1}{2} CK$ .



H.10

Nguyễn Văn Chương  
 Trường THCS Nguyễn Hàm Ninh  
 Ba Đồn - Quảng Trạch - Quảng Bình  
 Điện thoại: 0935187009